ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG QUANG HUY

DÃY KÉP VÀ CHUỖI KÉP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG QUANG HUY

DÃY KÉP VÀ CHUỖI KÉP

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Hà Trần Phương

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cám ơn

Trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thiện luận văn, tác giả đã nhận được sự động viên, khuyến khích và tạo điều kiện giúp đỡ của các cấp lãnh đạo, của các thầy giáo, cô giáo, bạn bè đồng nghiệp và gia đình.

Bằng tình cảm chân thành nhất, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới: Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Khoa Toán - Tin, Phòng Đào tạo - Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, các thầy cô giáo trực tiếp giảng dạy, đã tạo điều kiện giúp đỡ và cung cấp các kiến thức giúp tác giả học tập, nghiên cứu. Đặc biệt, tác giả cũng xin gửi lời biết ơn sâu sắc tới PGS. TS. Hà Trần Phương- người trực tiếp hướng dẫn khoa học đã tận tâm chỉ bảo, giúp đỡ, góp ý để tác giả hoàn thiện luận văn này.

Tác giả xin chân thành cảm ơn lãnh đạo Sở Giáo dục và Đào tạo, tỉnh Tuyên Quang, Ban Giám hiệu Trường THPT ATK Tân Trào cùng với người thân và bạn bè đồng nghiệp đã tận tình giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Đây là lần đầu tiên tập làm nghiên cứu nên Bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự góp ý chân thành của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp để hoàn thiện hơn nữa bản luận văn. Một lần nữa, tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Học viên

Đặng Quang Huy

MỞ ĐẦU

Các kiến thức về dãy và chuỗi số là những kiến thức sơ cấp quen thuộc, được giảng dạy trong chương trình toán ở các trường TPHT và cả bậc đại học. Hầu hết trong các đề thi học sinh giỏi cấp THPT, Olympic toán học sinh viên đều có những bài tập thú vị về dãy và chuỗi. Những vấn đề nghiên cứu chính đối với dãy và chuỗi là xét sự hội tụ, tìm giới hạn của các dãy và xét sự hội tụ, tính tổng của các chuỗi (nếu có).

Ta để ý rằng các phần tử của một dãy (đơn) hay số hạng tổng quát của một chuỗi (đơn) thường phụ thuộc vào một số tự nhiên (như là hàm một biến số) và chúng ta xét sự hội tụ, phân kỳ của dãy và chuỗi theo số tự nhiên này. Thời gian gần đây có nhiều tác giả đã mở rộng tính chất phụ thuộc của các phần tử của dãy hoặc số hạng tổng quát của chuỗi không chỉ vào một số tự nhiên mà nó có thể vào hai hoặc nhiều hơn các số tự nhiên. Ý tưởng này làm xuất hiện khái niệm về dãy kép và chuỗi kép.

Kí hiệu $\mathbb{N}^*$ là tập các số tự nhiên khác 0, hàm số $s : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ cho ta một dãy kép, thường kí hiệu là $(s(n, m))$. Ta cũng xây dựng được khái niệm chuỗi kép thông qua tổng hình thức $\sum_{m,n=1}^{\infty} s(n, m)$. Những vấn đề tự nhiên đặt ra đối với dãy kép và chuỗi kép cũng là xét sự hội tụ, tính giới hạn của các dãy và xét sự hội tụ, tính tổng của các chuỗi (nếu có). Trong quá trình nghiên cứu về dãy kép sẽ xuất hiện những vấn đề mới mà dãy (đơn) không có, chẳng hạn: sự hội tụ đều, giới hạn lặp,.... Đã có một số tác giả trình bày những kiến thức này ở một số tài liệu tiếng anh và cũng có một số công trình theo hướng nghiên cứu này được đăng tải trên các tạp chí toán học.

Với mong muốn tìm hiểu những vấn đề dãy và chuỗi kép, chúng tôi chọn đề tài **"Dãy kép và chuỗi kép"**. Mục đích chính của luận văn là tổng hợp một số kết quả nghiên cứu về sự hội tụ của dãy và chuỗi kép đã được các nhà toán học nghiên cứu trong thời gian gần đây. Luận văn này gồm có hai chương như sau:

Chương 1: Dãy kép. Trong chương này chúng tôi trình bày một số nội dung về dãy kép: sự hội tụ, tính đơn điệu, dãy kép Cauchy và dãy con của dãy kép.

Chương 2: Chuỗi kép. Chương này chúng tôi tổng hợp một số nội dung nghiên cứu về chuỗi kép: sự hội tụ, hội tụ tuyệt đối, chuỗi kép không âm và tích Cauchy của chuỗi (đơn và kép).

Chương 1

Dãy kép

1.1. Sự hội tụ của dãy kép

1.1.1. Giới hạn, giới hạn lặp của dãy kép

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu dãy kép các số phức, sự hội tụ, phân kỳ của nó. Ngoài ra, chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ giữa giới hạn của dãy kép và các giới hạn lặp của nó. Kí hiệu $\mathbb{N}^*$ là tập hợp các số tự nhiên khác 0, $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$ lần lượt là trường các số thực và phức.

Định nghĩa 1.1. Một dãy kép các số phức là một hàm số

$$s : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Ký hiệu $(s\,(n,m))$ hoặc đơn giản $(s_{n,m})$. Ta nói rằng một dãy kép $(s\,(n,m))$ hội tụ đến $a \in \mathbb{C}$ và ta viết

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = a$$

nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $N = N\,(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$|s(n,m) - a| < \varepsilon \quad \text{với mọi } n, m \geq N.$$

Số a được gọi là giới hạn kép của dãy kép $(s\,(n,m))$. Ngược lại ta nói rằng dãy $(s\,(n,m))$ phân kỳ.

Định nghĩa 1.2. Cho $(s\,(n,m))$ là một dãy kép của số thực.

i) Ta nói rằng $(s(n,m))$ dần đến ∞ và viết $\lim\limits_{n,m\to\infty} s(n,m) = \infty$ nếu với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại $K = K(\alpha) \in \mathbb{N}^*$, nếu $n, m \geq K$ thì $s(n,m) > \alpha$.

ii) Ta nói rằng $(s(n,m))$ dần đến $-\infty$ và viết $\lim\limits_{n,m\to\infty} s(n,m) = -\infty$, nếu với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại $K = K(\alpha) \in \mathbb{N}^*$ nếu $n, m \geq K$ thì $s(n,m) < \alpha$.

Ví dụ 1.1. *a*) Cho dãy kép $s(n,m) = \frac{1}{n+m}$. Ta có

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = 0.$$

Thật vậy, với $\varepsilon > 0$, chọn $N \in \mathbb{N}^*$ và $N > \frac{2}{\epsilon}$, khi đó với mọi $m, n \geq N$ ta có $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N}$, điều này kéo theo

$$|s(n,m) - 0| = \left|\frac{1}{n+m}\right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

b) Dãy kép $s(n,m) = \frac{n}{n+m}$ là phân kỳ. Thật vậy, với mọi n, m đủ lớn và $n = m \in \mathbb{N}^*$ ta có $s(n,m) = \frac{1}{2}$. Mặt khác với mọi n, m đủ lớn, $n = 2m \in \mathbb{N}^*$ ta có $s(n,m) = \frac{2}{3}$. Như vậy dãy kép $s(m,n)$ có hai dãy con hội tụ về hai phần tử khác nhau nên nó không hội tụ về một số thực a khi $n, m \longrightarrow \infty$.

c) Dãy kép $s(n,m) = n + m$ là phân kỳ đến ∞. Thật vậy, cho $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại $K \in \mathbb{N}^*$, sao cho $K > \alpha$ thì $n, m \geq K \Rightarrow n + m > \alpha$.

d) Dãy kép $s(n,m) = 1 - n - m$ là phân kỳ đến $-\infty$. Thật vậy, cho $\beta \in \mathbb{R}$, tồn tại $K \in \mathbb{N}^*$ sao cho $K > -\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}$ thì $n, m \geq K \Rightarrow -n, -m < \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - n - m < \beta$.

Định lý 1.1. *Một dãy kép các số phức có không quá một giới hạn.*

Chứng minh. Giả sử với a, a' là giới hạn của dãy $(s(n,m))$. Khi đó với $\varepsilon > 0$, tồn tại các số tự nhiên N_1, N_2 sao cho

$$n, m \geq N_1 \Rightarrow |s(n,m) - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.1}$$

$$n, m \geq N_2 \Rightarrow |s(n,m) - a'| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.2}$$

Chọn $N = \max\{N_1, N_2\}$, khi đó với mọi $n, m \geq N$, từ (1.1) và (1.2) ta có

$$\begin{aligned} 0 \leq |a - a'| &= |a - s(n,m) + s(n,m) - a'| \\ &\leq |a - s(n,m)| + |s(n,m) - a'| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

đúng với mọi $\varepsilon > 0$. Từ đó suy ra $a - a' = 0$ và do đó giới hạn là duy nhất. $\square$

Định nghĩa 1.3. Một dãy kép $(s\,(n,m))$ được gọi là bị chặn nếu tồn tại một số thực $M > 0$ sao cho $|s\,(n,m)| \leq M$ với mọi $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Định lý 1.2. *Một dãy kép các số phức hội tụ thì bị chặn.*

Chứng minh. Giả sử $s\,(n,m) \to a$ và cho $\varepsilon = 1$. Thì tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$n, m \geq N \Rightarrow |s(n,m) - a| < 1.$$

Kéo theo $|s(n,m)| < 1 + |a|$ với mọi $n, m \geq N$. Chọn

$M = \max\left\{|s\,(1,1)|, |s\,(1,2)|, |s\,(2,1)|, ..., |s\,(N-1, N-1)|, |a| + 1\right\}.$

Rõ ràng $|s(n,m)| \leq M$ với mọi $n, m \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Định nghĩa 1.4. Cho dãy kép $(s\,(n,m))$, các giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s(n,m)\right) \text{ và } \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s(n,m)\right)$$

nếu tồn tại thì được gọi là các giới hạn lặp của dãy kép.

Nếu hai giới hạn lặp trên tồn tại thì có thể chúng không bằng nhau như ví dụ sau đây:

Ví dụ 1.2. Xét dãy $s(n,m) = \frac{n}{m+n}$. Với mỗi $m \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} s(n,m) = 1$, do đó

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s(n,m)\right) = 1.$$

Tuy nhiên $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{m\to\infty} s(n,m) = 0$, do đó

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s(n,m)\right) = 0.$$

Trong trường hợp này giới hạn kép của dãy này không tồn tại (Ví dụ 1.1 b).

Chú ý: Sự tồn tại của giới hạn kép chưa chắc kéo theo sự tồn tại của giới hạn lặp. Ta có thể xem ví dụ sau:

Ví dụ 1.3. Xét dãy $s(n,m) = (-1)^{n+m}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$. Rõ ràng

$$\lim_{n,m\to\infty} s\left(n,m\right) = 0.$$

Thật vậy, với mỗi $\varepsilon > 0$, ta chọn $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó ta có

$$n,m \geq N \Rightarrow |s(n,m)| = \left|(-1)^{n+m}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right| \leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

Nhưng $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{m\to\infty} s\left(n,m\right)\right)$ không tồn tại do $\lim\limits_{m\to\infty} s\left(n,m\right)$ không tồn tại và $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty} s\left(n,m\right)\right)$ không tồn tại do $\lim\limits_{n\to\infty} s\left(n,m\right)$ không tồn tại.

Sự tồn tại của giới hạn kép và giới hạn lặp là độc lập với nhau. Tức là một dãy kép có giới hạn lặp chưa chắc đã có giới hạn kép và ngược lại. Ngay cả khi cả giới hạn kép và giới hạn lặp tồn tại thì chưa chắc chúng đã bằng nhau. Ta có thể thấy thông qua các ví dụ sau:

Ví dụ 1.4. *i*) Cho dãy kép $s\left(n,m\right) = \frac{1}{n}+\frac{1}{m}$. Ta có $\lim\limits_{n,m\to\infty} s\left(n,m\right) = 0$. Thật vậy, cho $\varepsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó

$$n,m \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n}+\frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

Mặt khác, từ $\lim\limits_{n\to\infty} s\left(n,m\right) = \frac{1}{m}$ và $\lim\limits_{m\to\infty} s\left(n,m\right) = \frac{1}{n}$ ta suy ra các giới hạn lặp cũng tồn tại và

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} s\left(n,m\right)\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s\left(n,m\right)\right) = 0.$$

ii) Xét dãy $s(n,m) = (-1)^m\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$. Tương tự như trong ví dụ 1.3. Ta có $\lim\limits_{n,m\to\infty} s(n,m) = 0$. Mặt khác, do $\lim\limits_{n\to\infty} s(n,m) = \frac{(-1)^m}{m}$ nên giới hạn lặp $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty} s(n,m)\right) = 0$. Nhưng do $\lim\limits_{m\to\infty} s(n,m)$ không tồn tại nên $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{m\to\infty} s(n,m)\right)$ không tồn tại.

iii) Xét dãy kép $s(n,m) = (-1)^{n+m}$. Không tồn tại giới hạn kép cũng không tồn tại giới hạn lặp.